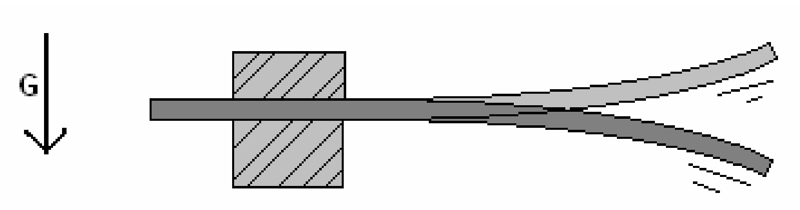
Svängande Balk

en blygsam fråga till naturen

Jonas Österberg

Sammanfattning



Med vilken frekvens svänger en kopparbalk vars ena ända är fast och den andra tyngts ner för att sedan släppas? Med vilken periodtid svänger trampolinen efter du kastat dig ut från den bara för att landa på magen? Hur snabbt skulle den svänga på månen? Spelar det någon roll hur bred trampolinen är? Dessa frågar besvaras kanske inte med direkta siffror med denna rapport, men formeln härleds.

$$T = (6{,}5 \pm 0{,}6)\frac{L^2}{H}\sqrt{\frac{D}{E}}$$

Formeln säger att trampolinen skulle svänga lika fort på månen som på jorden, och att bredden inte har någon betydelse. Denna rapport beskriver i detalj hur denna slutsats har härletts från experiment med 10 balkar av olika mått och material.

Experiment utfört av Torkel Ödegaard , Joakim Wennergren , Jonas Österberg

Fysikaliska Principer - MdH - Västerås - HT2003
Handledare - Magnus Strandås

Innehåll

Introduktion och Teori

Denna rapport skrivs som en del av kursen "Fysikaliska Principer-MdH-Västerås-2003". Uppgiften var att med hjälp av dimensionsanalys ta reda på en formel för svängningstiden hos en svängande balk beroende av en mängd faktorer, samt att göra en vettig felanalys av det hela.

Balkarna i undersökningen var alla av rätblocksform, och de egenskaper vi antog kunde påverka ingår i **ekvation(1)** nedan.

Det antogs att den slutgiltiga formeln för periodtiden skulle visa sig ha följande form:

$$T = C * L^l H^h B^b D^d G^g E^e$$

ekvation(1)

Där **T** är periodtiden, **C** är en dimensionslös konstant, **L** är den svängande delens längd, **H** är dess höjd (vertikalt), **B** är dess bredd (horisontellt), **D** är dess densitet, **G** är tyngdaccellerationen, **E** är elactisitetsmodulen, och de "små bokstäverna" betecknar de okända exponenterna.

Balkbredden och tyngdaccellerationen togs med i formeln fastän det verkade osannolikt att de skulle ha någon inverkan, vilket experimenten och dimensionsanalysen sedan bekräftade.

Experiment

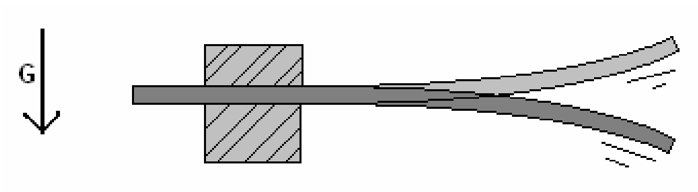
Experimenten omfattade 10 olika balkar, 4 av ett plastmeterial och 6 av stål. I det inledande skedet mättes balkarnas höjd och bredd med skjutmått.

En uppskattning av maximalfelet för dessa mätningar är:

H-Höjd ± 0,0003 m
B-Bredd ± 0,0003 m

Resultatet av mätningarna finns i **tabell(1)** i nästa avsnitt, Resultat.

Egentligen så mättes även balkarnas vikt och längd, för att kunna räkna ut deras densitet, men stålets är ju redan känt och plastens visade sig inte ha någon nytta för att härleda varken svängningstids-formeln eller konstanten eftersom inte plastens elasticitetsmodul var känd. Med densiteten hos plastbalkarna känd samt den fullständiga sökta formeln kan man räkna ut plastens elasticitetsmodul (E), men detta har utelämnats ur denna rapport som utanför ämnet.



figur(1)

Pilen med G markerar gravitationens riktning i experimentet.

Experimenten med balkarna gick till så att en balk valdes ut enligt tre separata mätserier och placerades i ett stabilt städ som var fäst i ett bord enligt **figur(1)**. Därefter mättes avståndet från kanten av städet till änden av den del som skulle utföra svängningen. Sedan sattes den fria änden i svängning genom att den yttersta spetsen fördes bort från sitt jämviktsläge en sträcka mellan cirka 3 och 9 cm, och sedan släpptes. Den då uppkomna svängningens periodtid uppmättes med en digital givare/tidsmätare.

En uppskattning av maximalfelet för mätningarna är:

L-Längd ± 0,003 m
T-svängningsTid ± 0,001 s

Resultatet av mätningarna finns i **tabell(s1,s2,s3)** samt **graf(s1,s2,s3)** i resultat-avsnittet.

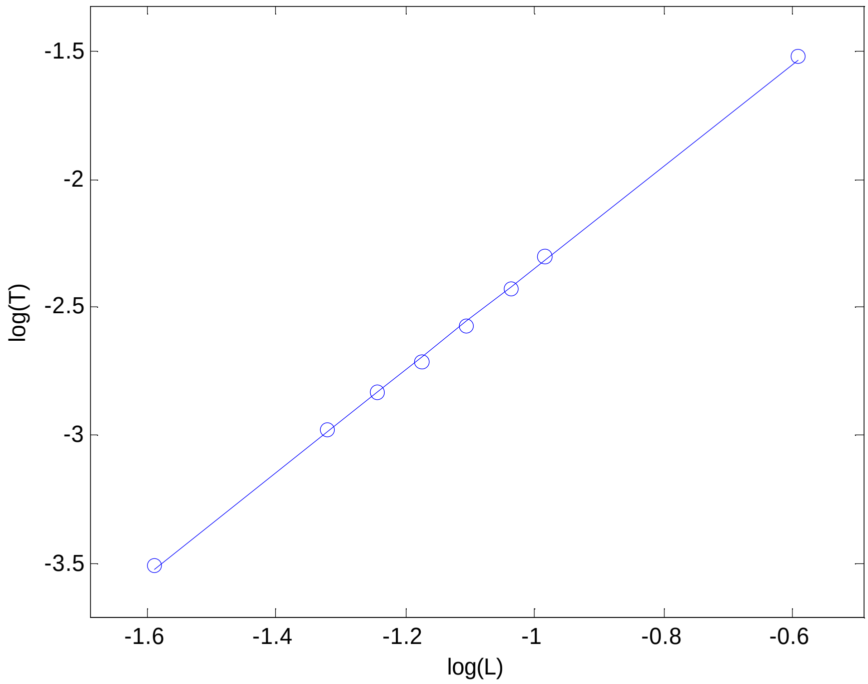
Resultat och Diskussion

		± 0,0003	*± 0,0003*
balk (nr)	**material**	**H-Höjd (m)**	**B-Bredd (m)**
2	Plast	0,0045	0,0156
3	Plast	0,0045	0,0305
4	Plast	0,0045	0,0403
5	Plast	0,0045	0,0253
6	Stål	0,0082	0,0250
7	Stål	0,0061	0,0245
8	Stål	0,0058	0,0160
11	Stål	0,0059	0,0298
12	Stål	0,0028	0,0250
13	Stål	0,0040	0,0246

tabell(1) - Balkarnas dimensioner och material

		± *0,0003*	± *0,0003*	± *0,003*	± *0,001*
balk (nr)	**material**	**H-Höjd (m)**	**B-Bredd (m)**	**L-Längd (m)**	**T-Tid (s)**
2	Plast	0,0045	0,0156	0,553	0,218
2	Plast	0,0045	0,0156	0,373	0,100
2	Plast	0,0045	0,0156	0,354	0,088
2	Plast	0,0045	0,0156	0,331	0,076
2	Plast	0,0045	0,0156	0,309	0,067
2	Plast	0,0045	0,0156	0,288	0,059
2	Plast	0,0045	0,0156	0,267	0,051
2	Plast	0,0045	0,0156	0,204	0,030

tabell(s1) - Längden varierades medans övrigt hölls konstant.



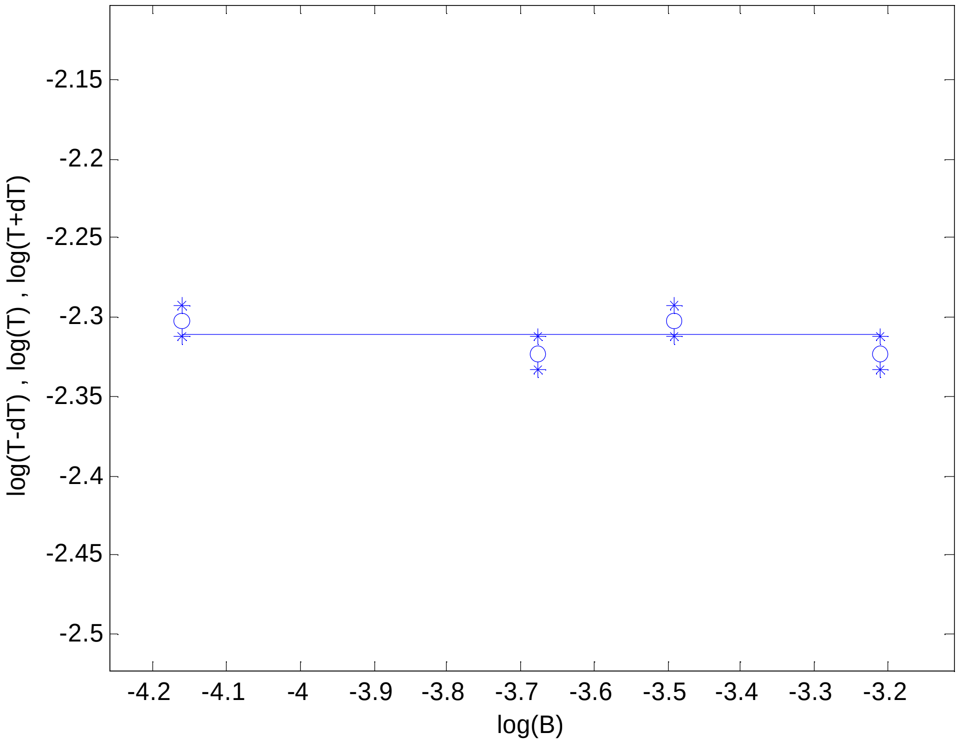
graf(s1) - Längdberoende

Lutningen på den bäst anslutande linjen är 1,99, vilket ger $T = kL^2$.

Den goda överensstämmelsen mellan bästa lutningen och heltalet 2 förklaras genom den relativt stora spridningen av längdvärdena i förhållande till onogrannheten i mätningarna. Onoggrannheten har inte markerats i **graf(s1)** men säger med god approximation att de sanna värdena ska ligga inom cirkeln som markerar respektive mätpunkt.

		± 0,0003	± 0,0003	± 0,003	± 0,001
balk (nr)	**material**	**H-Höjd (m)**	**B-Bredd (m)**	**L-Längd (m)**	**T-Tid (s)**
2	Plast	0,0045	0,0156	0,373	0,100
5	Plast	0,0045	0,0253	0,373	0,098
3	Plast	0,0045	0,0305	0,373	0,100
4	Plast	0,0045	0,0403	0,373	0,098

tabell(s2) - Bredden varierades.



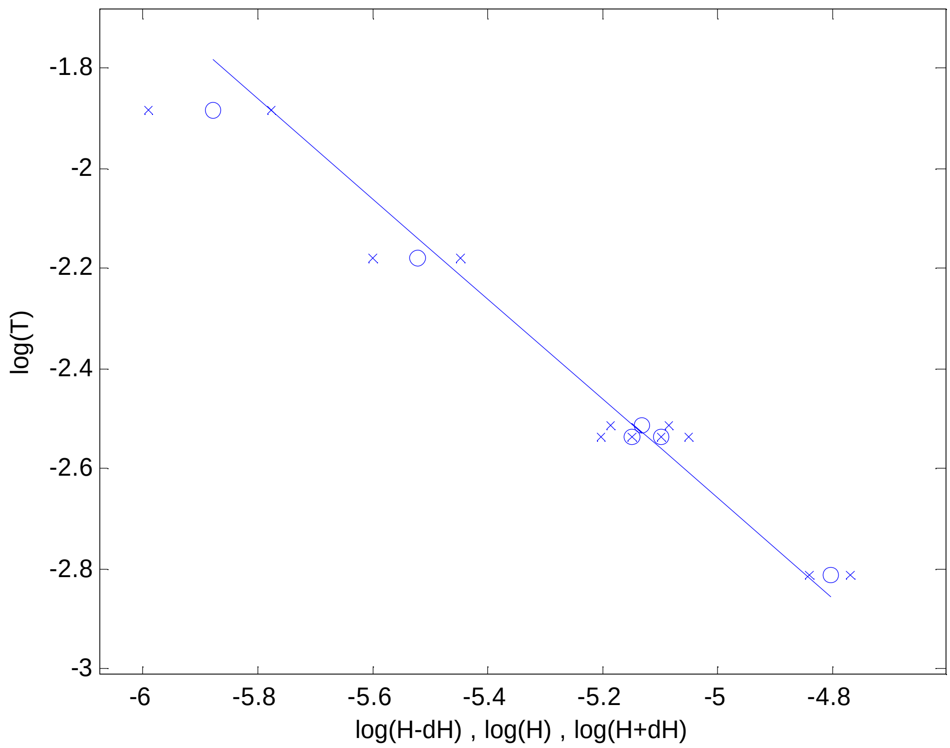
graf(s2) - Breddberoende

Cirklarna i grafen ovan markerar de uppmätta punkterna och stjärnorna markerar minsta och största värde i y-led för respektive mätpunkt, enligt onoggrannhetsuppskattningen. Lutningen på den inritade linjen är 0 och den bäst anslutande linjen enligt matlabs funktion polyfit har lutningen -0,016. Detta ger $T = kB^0$.

Detta innebär att svängningstiden är oberoende av balkbredden, vilket möjliggjör nästa mätserie som då inte har kravet att hålla balkbredden konstant.

		± 0,0003	± 0,0003	± 0,003	± 0,001
balk (nr)	**material**	**H-Höjd (m)**	**B-Bredd (m)**	**L-Längd (m)**	**T-Tid (s)**
12	Stål	0,0028	0,0250	0,600	0,152
13	Stål	0,0040	0,0246	0,600	0,113
11	Stål	0,0059	0,0298	0,600	0,081
8	Stål	0,0058	0,0160	0,600	0,079
7	Stål	0,0061	0,0245	0,600	0,079
6	Stål	0,0082	0,0250	0,600	0,060

tabell(s3) - Höjden varierades



graf(s3) - Höjdberoende

Cirklarna i grafen ovan markerar de uppmätta punkterna och kryssen markerar minsta och största värde i x-led för respektive mätpunkt, enligt onoggrannhetsuppskattningen. Onoggrannheten i y-led har inte tagits med i grafen men är ungefär från nedersta kanten av mätpunkternas cirklar till den övre kanten. Lutningen på den inritade linjen är -1 och den bäst anslutande linjens lutning enligt matlabs funktion polyfit är -0,87. Detta ger $T = kH^{-1}$.

Dimensionsanalys

Ekvation(1) ger med T=Tid, L=Längd, M=massa, dimensionsformeln:

$$T = L^l L^h L^b \left(M / L^3\right)^d \left(L / T^2\right)^g \left(M / T^2 / L\right)^e$$

eller

$$T = L^{l+h+b-3d+g-e} M^{d+e} T^{-2g-2e}$$

Enligt **mätserie(1)** ficks att l=2, **mätserie(2)** gav b=0 och **mätserie(3)** gav h=-1, detta insatt i ovanstående dimensionsformel ger:

$$T = L^{1-3d+g-e} M^{d+e} T^{-2g-2e}$$

vilket har enda lösningen (e=-½ , g=0, d=½).

Exponenterna insatta i **ekvation(1)** ger:

$$T = C * L^2 H^{-1} B^0 D^{½} G^0 E^{-½}$$

eller

$$T = C \frac{L^2}{H} \sqrt{\frac{D}{E}}$$

ekvation(2)

Beräkning av konstanten C

C löses ut ur **ekvation(2)**:

$$C = T\frac{H}{L^2}\sqrt{\frac{E}{D}}$$

ekvation(3)

Logaritmisk derivering med teckenjustering för att få maximalfelet ger:

$$\Delta C \approx C\left(\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta H}{H} + 2\frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2}\frac{\Delta E}{E} + \frac{1}{2}\frac{\Delta D}{D}\right)$$

ekvation(4)

Där Δ före variablerna betyder förändringen av värdet, (onoggrannheten).

I tabellen nedanför har **ekvation(3)** samt **ekvation(4)** tillämpats på datan i **tabell(s3)** för att räkna ut konstanten C samt dess onoggrannhet ΔC. Stålets elasticitetsmodul och densitet har lagts till och getts en feluppskattning som ±1 i sista värdesiffran av det i materialtabell, **referens(2)**, funna värdet.

	ΔT	**ΔH**	**ΔL**	**ΔE**	**ΔD**		
	0,001	0,0003	0,003	1,E+09	100		
balk	**T (s)**	**H (m)**	**L (m)**	**E ($kg/s^2/m$)**	**D (kg/m^3)**	**C**	**ΔC**
12	0,152	0,0028	0,600	1,95E+11	7800	5,911111	0,784382
13	0,113	0,0040	0,600	1,95E+11	7800	6,277778	0,645506
11	0,081	0,0059	0,600	1,95E+11	7800	6,6375	0,545387
8	0,079	0,0058	0,600	1,95E+11	7800	6,363889	0,530473
7	0,079	0,0061	0,600	1,95E+11	7800	6,693056	0,540885
6	0,060	0,0082	0,600	1,95E+11	7800	6,833333	0,493547

tabell(c1) - Beräkning av C och ΔC

$$C_{medel} = 6{,}5 \qquad \Delta C_{medel} = 0{,}6$$

En god gissning grundat på detta är:

$$C = 6{,}5 \pm 0{,}6$$

Mät-variablernas inverkan på onoggrannheten av C

Tabellen nedanför söker uppskatta hur stor inverkan onoggrannheten i de olika variablerna har på det beräknade värdet av C.
T', H', L', E' och D' är de termer i **ekvation(4)** där motsvarande variabel T, H, L, E, D förekommer - dividerat med ΔC så att deras summa ska bli 1, (100%). Medelvärdet för hela mätserien är beräknat och står under ungefärlighets-tecknet längst ner.

	ΔT	**ΔH**	**ΔL**	**ΔE**	**ΔD**	
	0,001	0,0003	0,003	1,E+09	100	
balk	**T'**	**H'**	**L'**	**E'**	**D'**	**ΔC**
12	0,050	0,807	0,075	0,019	0,048	0,784
13	0,086	0,729	0,097	0,025	0,062	0,646
11	0,150	0,619	0,122	0,031	0,078	0,545
8	0,152	0,621	0,120	0,031	0,077	0,530
7	0,157	0,609	0,124	0,032	0,079	0,541
6	0,231	0,507	0,138	0,036	0,089	0,494
	≈	≈	≈	≈	≈	
	0,138	**0,649**	**0,113**	**0,029**	**0,072**	

tabell(c2) - De olika variablernas "fel-vikt" vid beräknande av C.

Onoggrannheten i mätningen för höjden H har störts inverkan på onoggrannheten för den beräknade konstanten. Det skjutmått som användes gav inte intryck av att vara särskilt exakt, utan vickade under mätningarna. Användande av mikrometer-skruv skulle sannolikt förbättra mätvärdena och beräkningarna avsevärt.

Avslutande

Konstanten beräknades alltså till C=6,5±0,6, och inom detta intervall finns värdet för 2π ≈6,28, som i hög grad anknyter till svängningsrörelser. Mer exakta mätningar skulle kunna bekräfta eller förkasta möjligheten att konstanten har just det värdet.

Det slutliga härledda uttrycket blir:

$$T = (6{,}5 \pm 0{,}6)\frac{L^2}{H}\sqrt{\frac{D}{E}}$$

ekvation(271)

Referenser

(1) Bengt Sandell, Experimentell problemlösning (1996)

(2) "Materialdata", http://www.ima.mdh.se/kurser/mf1510/mf1510-elasticitetsmodul-e.pdf

----